ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

სადოქტორო პროგრამა: მათემატიკა

ზვიად ყალიჩავა

სემინარი1

სასრულ ელემენტთა მეთოდის გამოყენება ზოგიერთი დიფერენციალური განტოლების ამოსახსნელად

ნაშრომის ხელმძღვანელი ჯემალ ფერაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,

თსუ-ს ასოცირებული პროფესორი

ანოტაცია

ნაშრომი შედგება ორი თავისაგან. I-თავში განხილულია უბან-უბან მუდმივი და უბან-უბან წრფივი ფინიტური ფუნქციები, დამტკიცებულია მათი მააპროქსიმირებელი თვისებები. აგრეთვე, ამავე თავში სასრულ ელემენტთა მეთოდით ამოხსნილია სასაზღვრო ამოცანები:

ა) დიფუზიის ერთგანზოლილებიანი განტოლებისათვის

ბ) ტიმოშენკოს ძელის არაწრფივი განტოლებათა სისტემისათვის

მიღებულია მეთოდის ცდომილების შეფასება.

II- თავში განხილულია სასაზღვრო ამოცანები ელიფსური ტიპის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის. ამ ამოცანების ამოსახსნელად გამოყენებულია სასრულ ელემენტთა მეთოდი. აღწერილია შესაბამისი დისკრეტული სისტემის მიღების მეთოდი.

სარჩევი

თავი I. ფინიტური ბაზისური ფუნქციებიდა მათი თვისებები

1. ბაზისური ფუნქციები ერთგანზომილებიანი ამოცანებისათვის

რითცის მეთოდის გამოყენებისას მიახლოებით ამონახსნს აქვს სახე

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i \,,$$

სადაც $\varphi_i i$-ური ბაზისური ფუნქციაა, $i = 1, 2, \dots, n$.აქ ჩვენ განვიხილავთ ბაზისური ფუნქციების აგების ერთ მეთოდს და შევისწავლით ამ ფუნქციების მააპროქსიმირებელ თვისებებს. ბაზისურ ფუნქციებს , რომელთა შემოღებასაც ვაპირებთ, ეწოდება ფინიტური ფუნქციები ან ფუნქციები სასრული მატარებლით. ეს ისეთი ფუნქციებია, რომელთაგან თითოეული განსხვავდება ნულისაგან შედარებით მცირე არეში. ბაზისური ფუნქციების შერჩევისას ასეთი მიდგომა გამოყენებული იქნა სხვადასხვა სახის ამოცანების ამოსახსნელად. შედეგად ჩამოყალიბდა ალგორითმი, რომელიც დამკვიდრდა სასრულ ელემენტთა მეთოდის სახელით.

1.1 უბან-უბან მუდმივი ფინიტური ფუნქციები

განვიხილოთ ყველაზე მარტივი ფუნქციები სასრული მატარებლით უბან-უბან მუდმივი(კიბისებური) ფუნქციები.

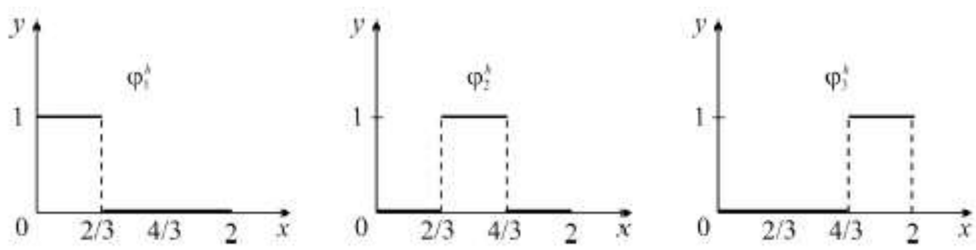
ვთქვათ D=[a, b] R. $\overline{D}$=[a, b] მონაკვეთზე ავაგოთ ბადე.

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,\ \ h_i = x_i - x_{i-1},\ \ h = \max h_i,\ i = 1, 2, \dots$,N. $[a, b]$დაიყო $N \equiv \mathrm{N}_h$რაოდენობის $D_i = (x_{i-1}, x_i)$ქვეარეებად, $i = 1, 2, \dots$, N,ე.წ. სასრულ ელემენტებად. ყოველ (x_{i-1}, x_i) - ზე შემოვიღოთ მახასიათებელი ფუნქცია

$$\varphi_i^h(x) = \begin{cases} 1, & x \in (x_{i-1}, x_i), \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_i). \end{cases} \quad (1)$$

მაგალითი 1. [0, 2] მონაკვეთზე ავაგოთ უბან-უბან მუდმივი ფინიტური ფუნქციების გრაფიკები იმ შემთხვევისათვის, როცა $h_i = \frac{2}{3}$და N = 3.

ამოხსნა .



□

$\{\varphi_i^h\}$ ფუნქციების ერთობლიობა გამოვიყენოთ ბაზისურ ფუნქციებად. $\varphi_i^h(x)$ფუნქციებზე , $i = 1, 2, \dots$, N, მოჭიმული წრფივი გარსი აღვნიშნოთ $\mathrm{F}_h -$ ით.

განვიხილოთ $\varphi_1^h, \varphi_2^h, \dots, \varphi_{\mathrm{N}_n}^h$, ფუნქციების ზოგიერთი თვისება. უპირველეს ყოვლისა აღვნიშნოთ ამ ფუნქციების წრფივი დამოუკიდებლობა, ამასთანავე $(\varphi_i^h, \varphi_k^h)_{L_2(D)} = 0$, თუ $i \neq k$, $(\varphi_i^h, \varphi_k^h)_{L_2(D)} = \mathrm{h}_i$. F_hსიმრავლე ეკუთვნის ნებისმიერ $L_p(D)$სივრცეს, p= 1, 2, …

(1) ფუნქციების მააპროქსიმირებელი თვისებები განისაზღვრება შემდეგი დებულებით: ყოველი $u(x) \in w_p^1(D)$ფუნქციისათვის არსებობს ისეთი $u_I(x) \in \mathrm{F}_h$

წრფივი კომბინაცია, რომ

$$\underbrace{inf}_{v \in \mathrm{F}_n} ||u - v||_{L_p(D)} \leq \|u - u_I\|_{L_p(D)} \leq h\|u\|_{w_{\mathrm{p}}^1(D)}, \tag{2}$$

სადაც ნორმები $L_p(D)$ და $w_p^1(D)$სივრცეებში განისაზღვრება გამოსახულებებით

$$\|u\|_{w_{\mathrm{p}}^1(D)} = ||u||_{L_p(D)} + \left\|\frac{du}{dx}\right\|_{\mathrm{L}_p(D)},$$

$$||u||_{L_p(D)} = \left(\int_D |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|u\|_{\mathrm{L}_\infty(D)} = \sup_{x \in D} |u(x)|.$$

ამ დებულების დასამტკიცებლად ჩავთვალოთ, რომ

$$u_I(x) = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i^h(x), \qquad u_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(t)dt. \tag{3}$$

გვაქვს

$$\|u(x) - u_I(x)\|_{L_p(D)} = \left(\int_a^b |u - u_i|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u - u_i|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ვინაიდან $x \in (x_{i-1}, x_i) -$ სათვის $\varphi_i^h(x) = 1$, $(3) -$ ის გამო

$$u(x) - u_I(x) = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x)dt - \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(t)dt = \frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \big(u(x) - u(t)\big)\, dt =$$

$\frac{1}{h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_t^x \frac{du}{d\eta}(\eta) d\eta\right) dt, \quad x \in (x_{i-1}, x_i).$

ამიტომ

$$\|u-u_I\|_{L_p(D)} = \left(\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{1}{h_i}\int_{x_{i-1}}^{x_i}dt\int_t^x\frac{du}{\mathrm{d\eta}}(\eta)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\left|\int_t^x \frac{du}{d\eta}d\eta\right| \le \int_{x-1}^x\left|\frac{du}{d\eta}\right|d\eta$, მივიღებთ

$$\|u-u_I\|_{L_p(D)} \le \left(\sum_{i=1}^{N}h_i\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{du}{d\eta}\right|d\eta\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

გამოვიყენოთ ჰელდერის უტოლობა

$$\left|\int_D u(x)v(x)dx\right| \le \left(\int_D |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_D |v(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad q\ge 1, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

გვექნება

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{du}{\mathrm{d\eta}}(\eta) \le \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{du}{d\eta}\right|^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}1^q\, d\eta\right)^{\frac{1}{q}} = (x_i-x_{i-1})^{\frac{1}{q}}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{du}{d\eta}\right|^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}} = h_i^{\frac{1}{q}}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{du}{d\eta}\right|^p d\eta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

მაშასადამე ,

$$\|u-u_I\|_{L_p(D)} \le \left(\sum_{i=1}^{N}h_i^{1+\frac{p}{q}}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{du}{dx}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le h\left(\sum_{i=1}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{du}{dx}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = h\left\|\frac{du}{dx}\right\|_{L_p(D)} \le h\|u\|w_p^1(D).$$

(2) - ის დამტკიცება დასრულებულია.

დამტკიცებული დებულებიდან გამომდინარეობს, რომ $\{\mathrm{F}_h\}$ქვესივრცეების მიმდევრობა სრულია $L_p(D)$- ში. $1 \le \mathrm{p} < \infty$.

1.2 უბან-უბან წრფივი ფინიტური ფუნქციები

ახლა განვიხილოთ ერთერთი ყველაზე გავრცელებული ფინიტური ფუნქციები, რომლებსაც ხშირად იყენებენ სხვაობიანი სქემების ასაგებად, სახელდობრ უბან-უბან წრფივი ფინიტური ფუნქციები (ე.წ. ფუნქციები-სახურავები, ფუნქციები-სახლები).

ვთქვათ $u(x)$ფუნქცია განსაზღვრულია $D=(a,b)$სასრულ არეზე. $\bar{D}=[a,b]-$ზე შემოვიღოთ ბადე

$$a=x_0<x_1<\cdots\ x_{n-1}<x_n=b,\qquad h_i=x_i-x_{i-1},\quad h=max h_i,\ \ i=1,2,\dots,\mathrm{N},$$

და ბადის ყოველ x_iშიდა კვანძს, $i=1,2,\dots,\mathrm{N}-1,$ შევუსაბამოთ ფუნქცია

$$\varphi_i^h(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{h_i}\,, & x\in(x_{i-1},x_i)\\ \dfrac{x-x_{i-1}}{h_i}\,, & x\in(x_{i-1},x_i)\\ 0, & x\notin x\in(x_{i-1},x_{i+1}),\qquad i=1,\ 2,\dots,N-1\end{cases}$$

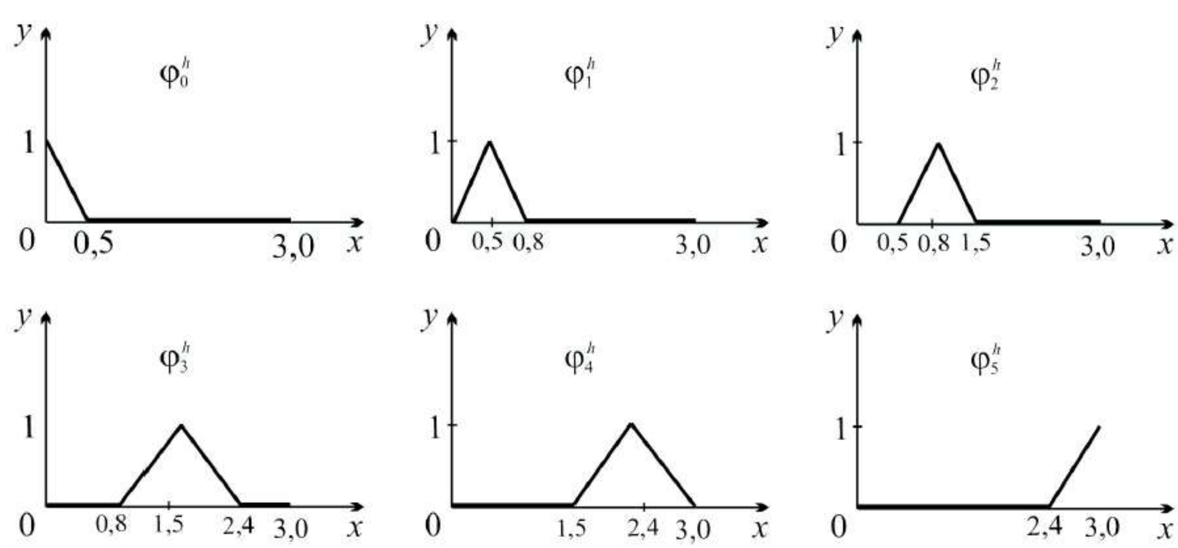
ხოლო x_0და x_{N} კიდურა კვანძებისათვის ავაგოთ ფუნქციები :

$$\varphi_i^h(x)=\begin{cases}\frac{x_1-x}{h_1}\,, & x\in(x_0,x_1),\\ 0, & x\notin(x_0,x_1),\end{cases}\varphi_N^h(x)=\begin{cases}\frac{x-x_{N-1}}{h_N}\,, & x\in(x_{N-1},x_N),\\ 0, & x\notin(x_{N-1},x_1),\end{cases}\tag{4}$$

ცხადია ამ ფუნქციების წრფივი დამოუკიდებლობა. თითოეული მათგანი განსხვავდება ნულისაგან მხოლოდ ინტერვალზე, რომლის სიგრძე 2h რიგისაა.

მაგალითი 2. ვთქვათ, [0; 3] მონაკვეთზე შემოღებულია ბადე , რომლის კვანძებია $x_0=0, x_1=0{,}5, x_2=0{,}8, x_3=1{,}5$,$x_4=2{,}4, x_5=3{,}0$.ავაგოთ შესაბამისი უბან-უბან წრფივი ფუნქციების გრაფიკები.

ამოხსნა.



□

φ_i^h- ფუნქციებზე მოჭიმული წრფივი გარსი აღვნიშნოთ F_h -ით. F_h -ში შემავალი თითოეული ფუნქცია არის ყწყვეტი, უბან-უბან წრფივი, მისი პირველი რიგის წარმოებული ჯამებადია სასრული ხარისხით. ამრიგად $\mathrm{F}_h \subset \mathrm{C(D)}$, $\mathrm{F}_h \subset w_2^1(D)$. იმისდა მიხედვით, თუ რომელ სივრცეში განიხილება $\varphi_i^h(x)$ - ების საშუალებით აპროქსიმირების ამოცანა, F_h- სიმრავლე შეიძლება აღვნიშნოთ, როგორც $\mathrm{C}_h(D)$, ასევე $w_2^{1,h}(D) -$ ით.

$$\text{თუ} v^h = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \, \varphi_i^h(x) \in \mathrm{F}_h \text{ , მაშინ} v^h(x_i) = \alpha_i. \text{ მაშასადამე , ამ წრფივი კომბინაციის} \alpha_i$$

კოეფიციენტი ემთხვევა $v^h(x)$ფუნქციის მნიშვნელობას x_iწერტილში. აღვნიშნოთ აგრეთვე, რომ φ_i^h ფუნქციები, $i = 0, 1, 2, \dots, \mathrm{N}$, თითქმის ორთოგონალურები არიან, ე.ი. მხოლოდ მეზობელი ფუნქციებისთვისაა სკალარული ნამრავლი $\mathrm{L}_2(D)$სივრცეში განსხვავებულია ნულისაგან

$$\int_a^b \varphi_i^h(x)\varphi_j^h(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{თუ} |\mathrm{i}-\mathrm{j}| > 1, \\ \neq 0 & \text{თუ } |\mathrm{i}-\mathrm{j}| \leq 1. \end{cases}$$

ამ თვისების გამო რითცის მეთოდში (4) ფუნქციების ბაზისად გამოყენების შემთხვევაში მიიღება გაიშვიათებული მატრიცი.

ახლა შევისწავლოთ (4) ფუნქციების ან, რაც იგივეა, F_hწრფივი გარსების მააპროქსიმირებელი თვისებები.

მართებულია შემდეგი დებულება: თუ $u(x) \subset w_2^2(D)$, მაშინ არსებობს ისეთი $u_{\mathrm{I}} \in \mathrm{F}_h \equiv w_2^{1,h}(D)$, ფუნქცია, რომ

$$\|u - u_{\mathrm{I}}\|_{L_2(D)} \leq \mathrm{h}^2 \left\| \frac{d^2 u}{dx^2} \right\|_{\mathrm{L}_2(D)} \leq h^2 \|u\|_{w_2^2(D)},$$

$$\|u - u_{\mathrm{I}}\|_{w_2^1(D)} \leq \mathrm{ch} \left\| \frac{d^2 u}{dx^2} \right\|_{\mathrm{L}_2(D)} \leq \mathrm{ch} \|u\|_{w_2^2(D)}, \quad (5)$$

სადაც c მუდმივი არ არის დამოკიდებული h - ზე და $u(x)$ - ზე.

დავამტკიცოთ ეს დებულება. ვინაიდან ერთგანზომილებიან შემთხვევაში $u(x) \in w_2^1(D)$ ფუნქცია (და მით უმეტეს $u(x) \in w_2^2(D)$ ფუნქცია) შეგვიძლია გავაიგივოთ უწყვეტ

ფუნქციასთან, ამიტომ ნებისმიერი x_i - წერტილიში, $i = 0, 1, 2, \dots, \mathrm{N}$, $u(x)$ფუნქციის $u(x_i)$მნიშვნელობა სასრული სიდიდეა. მაშასადამე შესაძლებელია

$$u_i(x) = \sum_{i=0}^{N} u(x_i)\, \varphi_i^h(x)$$

წრფივი კომბინაციის განხილვა.

შევაფასოთ სხვაობა $u(x)-u_I(x)$ნებისმიერი $x\in(x_{i-1},x_i)$ - სათვის. xარგუმენტის ამ მნიშვნელობებისათვის მართებულია შემდეგი

ლემა. ადგილი აქვს ფორმულას

$$u(x)-u_I(x)=\frac{1}{\mathrm{h}_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x}dx'\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}dx''\int\limits_{x''}^{x'}\frac{d^2u(t)}{dt^2}\,dt. \tag{6}$$

დამტკიცება. ადვილი სანახავია, რომ $u_I(x)=u(x_{i-1})+\frac{x-x_{i-1}}{h_i}(u(x_i)-u(x_{i-1}))$, რის შედეგადაც (6) ფორმულის მარცხენა გამოსახულება გადაიწერება შემდეგი სახით $u(x)-u_I(x)=u(x)-u(x_{i-1})-\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\big(u(x_i)-u(x_{i-1})\big)$.ამავე ფორმულის მარჯვნივ მყოფი გამოსახულებისათვის გვაქვს

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x}dx'\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}dx''\int\limits_{x''}^{x'}\frac{d^2u(t)}{dt^2}dt&=\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x}dx'\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(u'\,(x')-u'(x''))dx''\\&=\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x}(h_iu^i(x')-u(x_i)+u(x_{i-1}))dx'\\&=\frac{1}{h_i}[h_i(u(x)-u(x_{i-1}))-(x-x_{i-1})(u(x_i)-u(x_{i-1}))]\\&=u(x)-u(x_{i-1})-\frac{x-x_{i-1}}{h_i}(u(x_i)-u(x_{i-1})).\end{aligned}$$

(6) ფორმულა დამტკიცებულია. ■

განვიხილოთ (6). თუ გავაფართოვებთ ინტეგრების საზღვრებს და გამოვიყენებთ კოში ბუნიაკოვსკის უტოლობას, მივიღებთ

$$\begin{aligned}|u(x)-u_I(x)|&\le\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x}dx'\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}dx''\int\limits_{x''}^{x'}\frac{d^2u(t)}{dt^2}dt\\&\le\frac{1}{h_i}\int\limits_{x_{i-1}}^{x}dx'\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}dx''\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{d^2u(t)}{dt^2}\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=\ \frac{1}{h_i}h_i^2h_i^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{d^2u(t)}{dt^2}\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\\&=h_i^{\frac{3}{2}}\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{d^2u(t)}{dt^2}\right|^2dt\right)^{\frac{1}{2}},\ \ x\in(x_{i-1},x_i).\end{aligned}$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}|u(x)-u_I(x)|^2dx\le\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}h_i^3\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{d^2u(t)}{dt^2}\right|^2dt\right)dx=h_i^4\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{d^2u(t)}{dt^2}\right|^2dt.$$

თუ მოვახდენთ ამ უტოლობის აჯამვას i - ს მიმართ, $i = 1, 2, \dots, N$, ხოლო h_i -ს შევაფასებთ h-ით, მივიღებთ (5) უტოლობების პირველ შეფასებას. მეორე შეფასების მისაღებად ჯერ უნდა გავაწარმოოთ (6), ხოლო შემდეგ ჩავატაროთ იგივე მსჯელობა.

ანალოგიურად მტკიცდება, რომ $u(x) \in C^2(\bar{D})$, მაშინ

$$\|u - u_I\|_{C(\bar{D})} \leq h^2 \|u\|_{C^2(\bar{D})}.$$

ყველა ჩამოყალიბებული დებულება რჩება ძალაში, თუ (4) ფუნქციების ნაცვლად გამოვიყენებთ ნორმირებულ უბან-უბან წრფივ ფუნქციებს

$$\varphi_i^h(x) = \frac{1}{\sqrt{h_i}} \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x \in (x_{i-1}, x_i), \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}), \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \qquad (7)$$

$$\varphi_0^h(x) = \frac{1}{\sqrt{h_1}} \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h_1}, & x \in (x_0, x_1), \\ 0, & x \notin (x_0, x_1), \end{cases} \quad \varphi_N^h(x) = \frac{1}{\sqrt{h_N}} \begin{cases} \dfrac{x - x_{N-1}}{h_N}, & x \in (x_{N-1}, x_N), \\ 0, & x \notin (x_{N-1}, x_N). \end{cases}$$

ზოგჯერ უფრო მიზანშეწონილია ნორმირებული უბან-უბან წრფივი ფუნქციების გამოყენება. ასე მაგალითად, თუ ბადე აკმაყოფილებს კვაზითანაბრობის პირობას, ანუ $h \leq C \min_i h_i$, მაშინ (7) სახის ფუნქციების ბაზისად გამოყენების შედეგად მიიღება განტოლებათა სისტემები, რომელთა მატრიცების განპირობებულობის რიცხვი ნაკლებია იმ შემთხვევასთან შედარებით, როცა ვიყენებთ (4) ტიპის ფუნქციებს.

სასრულ ელემენტთა მეთოდის ზოგიერთი გამოყენება

2. სასრულელემენტებიანი სქემა დიფუზიის ერთგანზომილებიანი განტოლებისათვის

2.1 ამოცანის დასმა

ვთქვათ, საძიებელია $[a, b]$ - ზე უწყვეტი $u(x, y)$ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას.

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}(x)\right) + q(x)u(x) = f(x)(8)$$

და სასაზღვრო პირობას

$$u(a) = u(b) = 0. \qquad (9)$$

აქ $f(x) \in L_2(a,b), p(x)$ და $q(x)$ შემოსაზღვრული ფუნქციებია, $0 < p_0 \le p(x) \le p_1$,

$0 \le q(x) \le q_1, p_0, p_1, q_1$ - მუდმივები.

(8), (9) ამოცანის ოპერატორი აღვნიშნოთ A -თი, რომელიც განისაზღვრება

$Au = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(u)$ გამოსახულებით და D(A) განსაზღვრის არით. დავუშვათ D(A) შედგება $[a,b]$ -ზე უწყვეტი ფუნქციებისაგან, რომლებსაც გააჩნიათ წარმოებული $\frac{du}{dx} \in L_2(a,b)$, $Au \in L_2$,და რომლებიც აკმაყოფილებენ (9) სასაზრვრო პირობას.

2.2 A ოპერატორის თვისებები

(8), (9) ამოცანა გადავწეროთ ოპერატორული განტოლების სახით

$Au = f$, (10)

რომელსაც ჩვენ განვიხილავთ $H = L_2(a,b)$ ჰილბერტის სივრცეში $(u,v) = (u,v)_{L_2(a,b)}$

სკალარული ნამრავლი და $\|u\| = \|u\|_{l_2(a,b)}$ ნორმით.

შევისწავლოთ A ოპერატორის თვისებები. უპირველეს ყოვლისა არვნიშნოთ, რომ D(A) სიმრავლე სასრულია L_2-ში.

ვაჩვენოთ, რომ A ოპერატორი სიმეტრიულია. მართლაც,

$$(Au,v) = \int_a^b \left(-\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu\right)v\,dx = -p\frac{du}{dx}v\Big|_{x=a}^{x=b} +$$
$$+\int_a^b \left(p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + quv\right)dx, \quad u,v \in D(A).$$

ვინაიდან $u(a) = u(b) = 0$, გვექნება

$$(Au,v) = \int_a^b \left(p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + quv\right)dx. \qquad (11)$$

მივიღეთ u და v –ს მიმართ სიმეტრიული გამოსახულება. ამრიგად, $(Au,v) = (Av,u)$.

A ოპერატორი დადებითად განსაზღვრულია, ე.ი. აკმაყოფილებს უტოლობას

$$(Au,u) \ge \gamma\|u\|^2, \quad u \in D(A),$$

სადაც γ დადებითი მუდმივია, რომელიც არ არის დამოკიდებული $u(x)$- ზე. ამაში რომ დავრწმუნდეთ, საკმარისია გამოვიყენოთ (11) და ცნობილია უტოლობა $\left\|\frac{du}{dx}\right\| \ge c\|u\|$,

$u \in D(A), c = const > 0.$

A ოპერატორის აღნიშნული თვისებების გამო შეგვიძლია შემოვიღოთ Aოპერატორით წარმოშობილი H_Aენერგეტიკული სივრცე, რომელშიც სკალარული ნამრავლი და ნორმა განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$(u,v)_{H_A} = \int_a^b \left(p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + quv\right)dx, \quad \|u\|_{H_A} = (u,u)_{H_A}^{1/2}.$$

შევნიშნოთ, რომ განხილულ შემთხვევაში H_A ემთხვევა $\dot{W}_2^1$ სივრცეს და ადგილი აქვს ნორმების ეკვივალენტურობის თანაფარდობას

$$c_0\|u\|_{W_2^1} \le \|u\|_{H_A} \le c_1\|u\|_{W_2^1}. \qquad (12)$$

რითცის მეთოდის თანახმად, (8), (9) ამოცანა დაიყვანება

$$F(u) = (u,u)_{H_A} - 2(u,f) \quad (13)$$

ფუნქციონალის მინიმიზების ამოცანაზე. $F(u)$ ფუნქციონალის მინიმიზების ამოცანას გააჩნია ერთადერთი ამონახსნი $u \in \dot{W}_2^1(a,b)$, ამასთან თუ $\left|\frac{dp}{dx}\right| < \infty$, მაშინ $u \in W_2^2(a,b)$ და

$$\|u\|_{W_2^2} \le c\|f\|_{L_2}.$$

2.3 სასრულ ელემენტთა მეთოდის გამოყენება

ამოვხსნათ მიღებული ამოცანა სასრულ ელემენტთა მეთოდით. ვინაიდან $F(u)$ ფუნქციონალის განსაზღვრის არეა $\dot{W}_2^1(a,b)$, ამიტომ ბაზისურ ფუნქციებად უნდა ავიღოთ უბან-უბან წრფივი ფუნქციები. მათ ასაგებად (a,b) - ზე შემოვიღოთ ბადე

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b, \qquad h_i = x_i - x_{i-1},$$
$$i = 1,2,\dots,N,$$

აქ $c_2, c_3 > 0$მუდმივებია, რომლებიც არ არის დამოკიდებული h_i და h - ზე. ბადის ყოველ

i - ურ კვანძს შევუსაბამოთ უბან-უბან წრფივი ფუნქცია

$$\varphi_i^h(x) = \frac{1}{\sqrt{h}}\begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in (x_{i-1}, x_i), \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in (x_i, x_{i+1}), \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}), \end{cases}$$
$$i = 1,2,\dots,N-1, \qquad (14)$$

$$\varphi_0^h(x) = \frac{1}{\sqrt{h}}\begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h_1}, & x \in (x_0, x_1), \\ 0, & x \notin (x_0, x_1), \end{cases} \quad \varphi_N^h(x) = \frac{1}{\sqrt{h}}\begin{cases} \dfrac{x - x_{N-1}}{h_N}, & x \in (x_{N-1}, x_N), \\ 0, & x \notin (x_{N-1}, x_N). \end{cases}$$

ავაგოთ წრფივი კომბინაცია

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i\, \varphi_i^h(x).$$

ვინაიდან (9) წარმოადგენს ამოცანის მთავარ სასაზღვრო პირობას, მოვითხოვოთ, რომ

$$u_h(a) = u_h(b) = 0, \text{ე.ი. } a_0 = a_N = 0. \text{ ამრიგად,}$$

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i\, \varphi_i^h(x). \tag{15}$$

(15) სახის ფუნქციების სიმრავლე აღვნიშნოთ $\dot{W}_2^{1,h} = H_h$. ცხადია, რომ

$$\dot{W}_2^{1,h} \subset \dot{W}_2^1 \subset H_A.$$

ენერგეტიკულ სივრცეში რითცის მეთოდის თეორემის თანახმად ამოცანის მიახლოებით ამონახსნად ჩაითვლება (15) სახის ისეთი ფუნქცია, რომელიც $\dot{W}_2^{1,h}$ ქვესივრცეზე ახდენს (13) ფუნქციონალის მინიმიზებას. ზოგადი თეორიიდან გამომდინარეობს, რომ α_iკოეფიციენტების საპოვნელად უნდა ამოხსნილ იქნეს წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემა.

$$\hat{A}\alpha = \hat{f}, \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots , \alpha_{N-1})^{\mathrm{T}}, \tag{16}$$

სადაც $\hat{A} = (A_{ij})_{i,j=1}^{N-1}$მატრიცის და $\hat{f} = (f_1, f_2, \dots , f_{N-1})^T$ვექტორის ელემენტების გამოსათვლელად გამოიყენება ფორმულები

$$A_{ij} = \left(\varphi_i^h, \varphi_j^h\right)_{H_A} = \int_a^b \left(p\frac{d\varphi_i^h}{dx}\frac{d\varphi_j^h}{dx} + q\varphi_i^h\varphi_j^h\right)dx,$$

$$f_i = \left(f, \varphi_i^h\right) = \int_a^b f\varphi_i^h\, dx.$$

თუ აღვნიშნავთ $D_{ij} = D_i \cap D_j$, $D_i = (a,b) \cap supp\varphi_i^h = (x_{i-1}, x_{i+1}), i = 1, 2, \dots, N-1$,

გვექნება

$$A_{ij} = \int_{D_{ij}} \left(p\frac{d\varphi_i^h}{dx}\frac{d\varphi_j^h}{dx} + q\varphi_i^h\varphi_j^h\right)dx, \quad i,j = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$f_i = \int_a^b f\varphi_i^h\, dx, \qquad i = 1, 2, \dots, N-1 \tag{17}$$

ამრიგად, მოცემული ფუნქციებიდან (17) ინტეგრელების გამოთვლის შედეგად აიგება (16) სისტემის $\hat{A}$მატრიცი და $\hat{f}$ ვექტორი.

იმის გამო, რომ რითცის მეთოდში (16) სისტემის მატრიცი ინარჩუნებს A დიფერენციალური ოპერატორის ისეთ თვისებებს, როგორიცაა სიმეტრიულობა და დადებითად განსაზღვრულობა, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (16) სისტემას აქვს

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots\ , \alpha_{N-1})^T$ ამონახსნი და იგი ერთადერთია. მისი საშუალებით (15) ფორმულით ცალსახად განისაზღვრება ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი $u_h(x)$.

რადგან$D_{ij} = \emptyset$, თუ$|i-j| > 1, (17) -$ ისგამო $A_{ij} = 0$, $|i-j| > 1$.აქედან გამომდინარეობს, რომ $\hat{A}$მატრიცი სამდიაგონალურია და ამიტომ (16) სისტემის ამოსახსნელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ ფაქტორიზაციის მეთოდი.

2.4 მეთოდის კრებადობა

შევეხოთ u_hმიახლოებითი ამონახსნის uზუსტი ამონახსნისაკენ კრებადობის საკითხს. ენერგეტიკულ სივრცეში რითცის მეთოდის არსიდან გამომდინარეობს, რომ

$$\|u - u_h\|_{H_A} \le \|u - v_h\|_{H_A} ,$$

სადაც

$$\mathrm{v_h} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{b}_i\, \varphi_{\mathrm{i}}^{\mathrm{h}}(\mathrm{x})\text{ნებისმიერიფუნქცია}\mathrm{H}_{\mathrm{A}}^{(\mathrm{N})} = \dot{\mathrm{W}}_2^{1,\mathrm{h}} - \text{დან}(12) - \text{ისგათვალისწინებით}$$

მივიღებთ

$$\|u - u_h\|_{W_2^1} \le c\|u - v_h\|_{W_2^1} ,$$

საიდანაც ვსკვნით, რომ

$$\|u - u_h\|_{W_2^1} \le c\, inf\|u - v_h\|_{W_2^1}, \qquad v_h \in \dot{\mathrm{W}}_2^{1,\mathrm{h}}. \tag{18}$$

გამოვიყენოთ (5) უტოლობების სახით ჩაწერილი უბან-უბან წრფივი φ_i^hბაზისური ფუნქციების მააპროქსიმირებელი თვისებები. გარდა ამისა, მხედველობაში მივიღოთ $u(x)$ზუსტი ამონახსნის სიგლუვე. ამის შედეგად და (18) გათვალისწინებით მივალთ დასკვნამდე, რომ u_hმიახლოებითი ამონახსნი მიისწრაფვის uზუსტი ამონახსნისაკენ, როცა $h \to 0$, ამასთან, თუ დამატებით სრულდება $\left|\frac{dp}{dx}\right| < \infty$ პირობა, მაშინ კრებადობის სიჩქარისათვის მართებულია შეფასება

$$\|u - u_h\|_{W_2^1} \le c_4 h\|u\|_{W_2^2} \le c_5 h\|f\|_{L_2(a,b)}.$$

დამატებითი კვლევა გვაძლევს ცდომილების შეფასებას $L_2(a,b)$ სივრცეში

$$\|u - u_h\|_{L_2(a,b)} \le ch^2\|f\|_{L_2(a,b).}$$

აქc_4 , c_5 ,cმუდმივები არ არის დამოკიდებული h და $\mathrm{u}-$ ზე.

2.5 სასრულელემენტებიანი სქემა

ვთქვათ, p(x) და q (x) უბან-უბან მუდმივი, სასრული რაოდენობის წყვეტის წერტილების მქონე ფუნქციებია. ამასთან დავუშვათ, ეს წერტილები ემთხვევა ბადის კვანძებს და $p_{i-1/2}=p(x)$, $q_{i-1/2}= q(x)$, $x \in (x_{i-1}, x_i)$, i = 1,2, …., N. ავაგოთ (15) სისტემის $\hat{A}$ მატრიცი და fვექტორი, ვინაიდან $A_{ij} = 0$, როცა $|i - j|> 1$, გამოსათვლელია მხოლოდ $A_{j-1,j}$, A_{jj}და $A_{j+1,j}$ ელემენტები.

(17)-ის პირველი ფორმულის თანახმად

$A_{ij} = \left(p\ \frac{d\varphi_i}{dx},\ \frac{d\varphi_j}{dx}\right) + \ (q\varphi_i, \varphi_j)$, i = j – 1, j, j+1.

გამოვთვალოთ პირველი შესაკრები, (14)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$\left(p\ \frac{d\varphi_{j-1}}{dx}, \frac{d\varphi_j}{dx}\right) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} p\ \frac{d\varphi_{j-1}}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}dx\ =$$

$$= \int_{x_{j-1}}^{x_j} p_{j-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{h}h_j}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{h}h_j}\right)^2 dx = -p_{j-1/2}\frac{1}{hh_j}$$

$$\left(p\ \frac{d\varphi_{j-1}}{dx}, \frac{d\varphi_j}{dx}\right) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} p\ \left(\frac{d\varphi_j}{dx}\right)^2 dx\ + \int_{x_j}^{x_{j+1}} p\ \left(\frac{d\varphi_j}{dx}\right)^2 dx\ =$$

$$= \int_{x_{j-1}}^{x_j} p_{j-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{h}h_j}\right)dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} p_{j+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{h}h_{j+1}}\right)^2 dx =$$

$$= p_{j-1/2}\frac{1}{hh_j}\ +\ p_{j+1/2}\frac{1}{hh_{j+1}}$$

$\left(p\ \frac{d\varphi_{j+1}}{dx}, \frac{d\varphi_j}{dx}\right) = \left(p\ \frac{d\varphi_j}{dx}, \frac{d\varphi_{j+1}}{dx}\right) = -p_{j+1/2}\frac{1}{hh_{j+1}}$

ახლა გამოვთვალოთ მეორე შესაკრები. (14)-ის თანახმად

$$\left(q\varphi_{j-1}\ - \varphi_j\right)\ =\ \int_{x_{j-1}}^{x_j} q\varphi_{j-1} -\ \varphi_j dx = q_{j-\frac{1}{2}}\int_{x_{j-1}}^{x}\frac{(x_j - x)(x - x_{j-1})}{hh_j^2}dx =\ q_{j-\frac{1}{2}}\frac{h_j}{6h}$$

$$\left(q\varphi_{j-1}, \varphi_j\right)\ =\ \int_{x_{j-1}}^{x_j} q\varphi_j^2\, dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} q\varphi_j^2\, dx\ = q_{j-\frac{1}{2}}\int_{x_{j-1}}^{x}\frac{(x - x_{j-1})^2}{hh_j^2}dx +$$

$$+\, q_{j+1/2}\int_{x_1}^{x_{j+1}}\frac{(x_{j-1} - x)^2}{hh_{j+1}^2}dx = q_{j-1/2}\frac{2h_j}{6h} + q_{j-1/2}\frac{2h_{j+1}}{6h}$$

$(q\varphi_{j+1}, \varphi_j) = (q\varphi_j, \varphi_{j+1}) = q_{j+1/2}\frac{h_{j+1}}{6h}$, j = 1,2, ... N – 1.

ამრიგად, Â არის N - 1 რიგის შემდეგი სახის მატრიცი

$$\hat{A} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} \left(\frac{p_{1/2}}{h_1}+\frac{p_{3/2}}{h_2}\right) & -\frac{p_{3/2}}{h_2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{p_{3/2}}{h_2} & \left(\frac{p_{3/2}}{h_2}+\frac{p_{5/2}}{h_3}\right) & -\frac{p_{5/2}}{h_3} & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & -\frac{p_{N-3/2}}{h_{N-1}} \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{p_{N-3/2}}{h_{N-1}} & \left(\frac{p_{N-3/2}}{h_{N-1}}+\frac{p_{N-1/2}}{h_N}\right) \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{1}{6h}\begin{pmatrix} 2(q_{1/2}h_1+q_{3/2}h_2) & q_{3/2}h_2 & 0 & \dots & 0 \\ q_{3/2}h_2 & 2(q_{3/2}h_2+q_{5/2}h_3) & q_{5/2}h_3 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & q_{N-3/2}h_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & q_{N-3/2}h_{N-1} & 2(q_{N-3/2}h_{N-1}+q_{N-1/2}h_N) \end{pmatrix}.$$

რაც შეეხება $\hat{f}$ ვექტორს, გვექნება $\hat{f}$ = (f_1, f_2, ... f_{N-1})^T, სადაც

$$f_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f\varphi_i(x)dx\,,$$

i =1,2,..., N – 1

მაგალითი 3. დაწერეთ დიფუზიის ამოცანის სასრულელემენტებიანი სქემის
ა) ზოგადი სახე,
ბ) კერძო სახე, რომელიც შეესაბამება შემდეგ მონაცემებს
a = 0, b = 1, f(x) = $3e^{9x^2}\sin x + 1$, N = 5, $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}3$
$x_2 = 0{,}5$ $x_3 = 0{,}6$ $x_4 = 0{,}8 x_5 = 1{,}0 p_i = (2i+1)/6$ $q_i = (i+1)/5$
ამოხსნა. ა) Âα = $\hat{f}$
სადაც Â განისაზღვრება (19) ფორმულით, ხოლო $\alpha = (\alpha_1\alpha_2\,,\ \dots\ ,\alpha_{N-1})^{\mathsf{T}}$,

$$\hat{f} = (f_1, f_2, \dots, f_{N-1})^{\mathsf{T}}, \quad f_i = \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} f\varphi_i(x)dx, \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

$$\widehat{A} = \frac{1}{h}\begin{pmatrix} (\frac{p_{1/2}}{h_1} + \frac{p_{3/2}}{h_2}) & -\frac{p_{3/2}}{h_2} & 0 & 0 \\ -\frac{p_{3/2}}{h_2} & (\frac{p_{3/2}}{h_2} + \frac{p_{5/2}}{h_3}) & -\frac{p_{5/2}}{h_3} & 0 \\ 0 & -\frac{p_{5/2}}{h_3} & (\frac{p_{5/2}}{h_3} + \frac{p_{7/2}}{h_4}) & -\frac{p_{7/2}}{h_4} \\ 0 & 0 & -\frac{p_{7/2}}{h_4} & (\frac{p_{7/2}}{h_4} + \frac{p_{9/2}}{h_5}) \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{1}{6h}\begin{pmatrix} 2(q_{1/2}h_1 + q_{3/2}h_2) & q_{3/2}h_2 & 0 & 0 \\ q_{3/2}h_2 & 2(q_{3/2}h_2 + q_{5/2}h_3) & q_{5/2}h_3 & 0 \\ 0 & q_{5/2}h_3 & 2(q_{5/2}h_3 + q_{7/2}h_4) & q_{7/2}h_4 \\ 0 & 0 & q_{7/2}h_4 & 2(q_{7/2}h_4 + q_{9/2}h_5) \end{pmatrix}.$$

ბ)

გვაქვს $h_1 = x_1 - x_0 = 0{,}3 h_2 = x_2 - x_1 = 0{,}2, h_3 = x_3 - x_2 = 0{,}1,$ $h_4 = x_4 - x_3 = 0{,}2, h_5 = x_5 - x_4 = 0{,}2,$ $p_{1/2} = 1/3$
$p_{3/2} = \frac{2}{3} p_{5/2} = 1,$ $p_{7/2} = \frac{4}{3},$ $p_{9/2} = \frac{5}{3},$ $q_{1/2} = 0{,}3,$ $q_{3/2} = 0{,}5,$ $q_{5/2} = 0{,}7,$ $q_{7/2} = 0{,}9.$ $q_{9/2} = 1{,}1.$ დავუშვათ, რომ

$$h = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} h_i = 0.2$$

ჩავსვათ ეს მნიშვნელობები (20)-ში. 10^{-4}–ის სიზუსტით გვექნება

$$\widehat{A} = 5\begin{pmatrix} (\frac{10}{9} + \frac{10}{3}) - \frac{10}{9} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{10}{9} & (\frac{10}{3} + 10) & -10 & 0 \\ 0 & -10 & (10 + \frac{20}{3}) & -\frac{20}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{20}{3} & (\frac{20}{3} + \frac{25}{3}) \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{1,2}\begin{pmatrix} 2(0,09 + 0,1) & 0,1 & 0 & 0 \\ 0,1 & 2(0,1 + 0,07) & 0,07 & 0 \\ 0 & 0,07 & 2(0,07 + 0,18) & 0,18 \\ 0 & 0 & 0,18 & 2(0,18 + 0,22) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 22,5389 & -5,4722 & 0 & 0 \\ -5,4722 & 66,9500 & -49,9417 & 0 \\ 0 & -49,9417 & 83,7500 & -33,1833 \\ 0 & 0 & -33,1833 & 75,6667 \end{pmatrix}.$$

$\hat{f}$ ვექტორის კომპონენტები წარმოვადგინოთ განსაზღვრული ინტეგრალის სახით

$$f_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (3e^{x^2} sinx + 1)\, \varphi_i(x) dx, \;\; i = 1,2,3,4.$$

კვადრატული ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ f_i - ების მიახლოებით მნიშვნელობებს საჭირო სიზუსტით.

3. სარულელემენტებიანი სქება ძელის არაწრფივი ამოცანისათვის
3.1. ამოცანის დასმა

განვიხილოთ სასაზღვრო ამოცანა

$$\left(cd - a + b\int_0^1 (w^{'}(x))^2 dx\right) w^{''}(x) - cd\psi^{'}(x) = f(x),$$

$$\psi^{''}(x) - cd(\psi(x) - w^{'}(x)) = 0, \qquad (19)$$

$$0 < x < 1,$$

$$w(0) = w(1) = 0 \quad \psi^{'}(1) = 0 \qquad (20)$$

სადაც w(x), ψ(x) საძიებელი ფუნქციები, ხოლო f(x) მოცემული ფუნქციააa,b,c და d-მოცემული დადებითი სიდიდეებია, ამასთან cd – a > 0 (29) სისტემა აღწერს ტიმოშენკოს ძელის სტატიკურ მდგომარეობას.

3.2. სისტემის რედუცირება

(19) სისტემის მეორე განტოლებისა და გრინიმ ფუნქციის

$$G(x,\xi) = (cd)^{5/2} \begin{cases} \sinh\left(\sqrt{cd}(x-1)\right)\sinh\left(\sqrt{cd}\xi\right), 0 < \xi < x < 1 \\ \sinh\left(\sqrt{cd}x\right)\sinh\left(\sqrt{cd}(\xi-1)\right), 0 < \xi < x < 1 \end{cases}$$

გამოყენებით ψ (x) გამოვსაოთ w(x)-ის საშუალებით

$$\psi(x) = \frac{1}{(cd)^{\frac{3}{2}}\sinh(\sqrt{cd})}\int_0^1 \frac{\partial G}{\partial x}(x,\xi) w(\xi) d\xi$$

ეს ფორმულა ჩავსვათ სისტემის პირველ განტოლებაში. ამის შედეგად მივიღებთ ერთუცნობიან განტოლებას w(x)-ის მიმართ, რომელიც (20)-ის შესაბამის პირობასთან ერთად ქმნის შემდეგ სასაზღვრო ამოცანას

$$\left(cd - a + b\int_0^1 w^{'}(x))^2 dx\right) w^{''}(x) + (cd)^2 w(x) + \int_0^1 G(x,\xi) w(\xi) d\xi = f(x) (21)$$

$$w(0) = w(1) = 0 \qquad (22)$$

განვიხილოთ (21), (22) ამოცანის ამოხსნი საკითხი. ჩვენ აღვწერთ ალგორითმის იმ ნაწილს, რომელიც დაკავშირებულია ამოცანის დისკრეტულ სისტემაზე დაყვანასთან.
ვთქვათ, საძიებელია (21), (22) ამოცანის განზოგადოებული ამონახსნი ისეთი w(x) ∈ $\mathring{w}_2^1(0,1)$ფუნქცია, რომელთათვისაც სრულდება იგივეობა

$$-\left(\mathrm{cd}-\mathrm{a}+\mathrm{b}\int_0^1 w^{'}(x))^2dx\right)\int_0^1 w^{'}(x)v^{'}(x)dx+(cd)^2\int_0^1 w\,(x)v(x)dx+$$

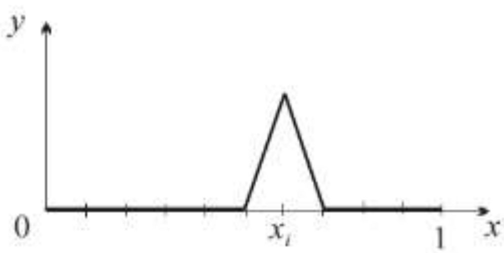
$$\int_0^1 \left(\int_0^1 G\,(x,\xi)w(\xi)d\xi\right)v(x)dx=$$

$$=\int_0^1 f\,(x)v(x)dx \qquad (23)$$

ყოველი v(x) ∈ $\mathring{w}_2^1(0,1)$ − სათვის.

3.3. სასრულ ელემენტთა მეთოდი

[0,1] მონაკვეთზე შემოვიღოთ რეგულარული ბადე ბიჯით h=$\frac{1}{n}$, n > 1, და კვანძებით, $x_i = ih, i = 0,1\ldots, n.$
ყოველ x_i შიგა კვანძს i = 1,2,…, n − 1, შევუსაბამოთ $\varphi_i^h(x)$ბაზისური უბან-უბან წრფივი ფინიტური ფუნქცია (ნახ.3).



ნახ. 3

მოვიყვანოთ $\varphi_i^h(x)$-ის ანალიზური გამოსახულება

$$\varphi_i^h(x)=\frac{1}{h^{3/2}}\sqrt{\frac{3}{2}\begin{cases}x-x_{i-1}, x\in(x_{i-1},x_i)\\ x_{i+1}-x, x\in(x_i,x_{i+1})\\ 0, \qquad x\notin(x_{i-1},x_{i+1})\end{cases}}$$

მიახლოებითი ამონახსნი ვეძებოთ

$$w_n(x)=\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_j\varphi_j^h(x)\;(24)$$

ჯამის სახით. გალიორკინის ვარიაციულ პრინციპზე დაყრდნობით α_jკოეფიციენტების საპოვნელად (23)-ე იგივეობაში w(x)-ის ნაცვლად ჩავსვათ w_n(x) ფუნქცია, ხოლო v(x)-ად რიგრიგობით გამოვიყენოთ ფუნქციები $\varphi_1^h(x), \varphi_2^h(x), \ldots, \varphi_{n-1}^h(x)$.
მაშასადამე უნდა სრულდებოდეს

$$-\left(\mathrm{cd}-\mathrm{a}+\mathrm{b}\int_0^1 w'(x))^2dx\right)\int_0^1 w_n'(x)\varphi_i^{h'}(x)dx$$

$$+(cd)^2\int_0^1 w_n'(x)\varphi_i^{h}(x)dx+\int_0^1\left(\int_0^1 G(x,\xi)w_n(\xi)d\xi\right)\varphi_i^{h}(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)\varphi_i^{h'}(x)dx \quad i=1,2,\dots,n-1. \tag{25}$$

გამოვითვალოთ ინტეგრალები

$$\int_0^1 \varphi_i^h(x)\varphi_j^h(x)dx$$

და

$$\int_0^1 \varphi_i^{h'}(x)\varphi_j^{h'}(x)dx \qquad i,j=1,2,\dots,n-1$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\int_0^1 \varphi_i^h(x)\varphi_j^h(x)dx=0,\quad \int_0^1 \varphi_i^{h'}(x)\varphi_j^{h'}(x)dx=0 \ \text{თუ}\ |i-j|>1 \tag{26}$$

სხვა შემთხვევაში გვექნება

$$\int_0^1(\varphi_i^h(x))^2dx=\frac{1}{h^3}\frac{3}{2}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})^2dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x_{i+1}-x)^2dx\right)=$$

$$=\frac{1}{h^3}\frac{3}{2}\left(\frac{(x-x_{i-1})^3}{3}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}-\frac{(x_{i+1}-x)^3}{3}\Big|_{x_i}^{x_{i+1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{h^3}\frac{3}{2}\left(\frac{h^3}{3}+\frac{h^3}{3}\right)=1,\qquad i=1,2,\dots,n-1,$$

$$\int_0^1\varphi_{i-1}^h(x)\varphi_i^h dx=\frac{1}{h^3}\frac{3}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x_i-x)(x-x_{i-1})dx=$$

(27)

$$=\frac{1}{h^3}\frac{3}{2}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[(x_{i-1}-x)dx+h](x-x_{i-1})dx=$$

$$=\frac{1}{h^3}\frac{3}{2}\left(-\frac{(x-x_{i-1})^3}{3}+h\frac{(x-x_{i-1})^2}{2}\Big|_{x_{i-1}}^{x_i}\right)=$$

$$=\frac{1}{h^3}\frac{3}{2}\left(-\frac{h^3}{3}+h\frac{h^2}{2}\right)=\frac{1}{h^3}\frac{3}{2}\frac{h^3}{6}=\frac{1}{4},\qquad i=2,3\ ,\dots,n-1$$

და ვინაიდან

$$\varphi_i^{h'}(x) = \frac{1}{h^{3/2}}\sqrt{\frac{3}{2}}\begin{cases}1, & x \in (x_{i-1}, x_i)\\ -1, & x \in (x_i, x_{i+1})\\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1})\end{cases}$$

შეგვიძლია დავწეროთ

$$\int_0^1 (\varphi_i^{h'}(x))^2 dx = \frac{1}{h^3}\frac{3}{2}\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx + \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} dx\right) = \frac{1}{h^3}\frac{3}{2}2h = \frac{3}{h^2},\ \ i = 1,2,\dots,n-1$$

$$\int_0^1 \varphi_{i-1}^{h'}(x)\varphi_i^{h'} dx = \frac{1}{h^3}\frac{3}{2}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(-1)dx = \frac{1}{h^3}\frac{3}{2}(-h) = \frac{3}{2h^2}\ \ , i = 1,2,\dots,n-1\,. \qquad (28)$$

ახლა (25)-ის საშუალებით შეგვიძლია მივიღოთ სასრულელემენტებიანი სისტემა. შემოვიღოთ დამხმარე კოეფიციენტები $\alpha_0 = \alpha_n = 0$ და ფუნქციები $\varphi_0^h(\mathrm{x}) = \varphi_n^h(\mathrm{x}) = 0$, $\mathrm{x} \in [0, 1]$ (24), (26) და (28)-ის თანახმად გვაქვს

$$\int\limits_0^1 w_n'(x))^2 dx = \int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\varphi_i^{h'}(x)\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_i\varphi_j^{h'}(x)dx = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_i\alpha_i\int\limits_0^1 \varphi_i^{h'}(x)\varphi_j^{h'}(x)\,dx =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\left(\alpha_{i-1}\int\limits_0^1 \varphi_i^{h'}(x)\varphi_{i-1}^{h'}(x)dx + \alpha_i\int\limits_0^1(\varphi_i^{h'}(x))^2dx + \alpha_{i+1}\int\limits_0^1 \varphi_i^{h'}(x)\varphi_{i+1}^{h'}dx\right) =$$

$$= \frac{3}{2h^2}\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_{i-1} + 2\alpha_i - 2\alpha_{i-1})\alpha_i = \frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{h}\right)^2$$

და აგრეთვე

$$\int\limits_0^1 w_n'(x)\varphi_j^{h'}(x)dx\int\limits_0^1\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_i\varphi_i^{h'}(x)\,\varphi_i^{h'}(x)dx = \alpha_{i-1}\int\limits_0^1 \varphi_i^{h'}(x)\varphi_j^{h'}(x)\,dx +$$

$$+\alpha_i\int\limits_0^1(\varphi_i^{h'}(x))^2dx + \alpha_{i+1}\int\limits_0^1 \varphi_{i+1}^{h'}(x)\varphi_i^{h'}(\mathrm{x})\,dx = \frac{3}{2h^2}\ (\alpha_{i-1} + 2\alpha_{i-}\alpha_{i+1})$$

i=1,2,…,n-1

შემდეგ (24), (26) და (27)-დან გამომდინარეობს

$$\int\limits_0^1 w_n\ (x)\varphi_i^h\ \ (x)dx\int\limits_0^1\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_i\varphi_j^h\ \ (x)\,\varphi_i^{h'}(x)dx = \alpha_{i-1}\int\limits_0^1 \varphi_{i-1}^h(x)\varphi_i^h\ \ (x)\,dx +$$

$$+\alpha_i\int\limits_0^1(\varphi_i^h\ \ (x))^2dx + \alpha_{i+1}\int\limits_0^1 \varphi_i^h\ \ (x)\varphi_i^h\ \ (x)dx = \frac{1}{4}\ (\alpha_{i-1} + 2\alpha_i + \alpha_{i+1})$$

$$\int\limits_0^1\left(\int\limits_0^1 G(x,\xi)\,w_n(\xi)d\xi\right)\varphi_i^h\ \ (x)dx = \sum_{j=1}^{n-1}s_{ij}\alpha_j.$$

სადაც

$$s_{ij} = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} G(x,\xi)\, \varphi_j^h \ \ (\xi) d\xi \right) \varphi_i^h \ \ (x) dx,$$

i,j=1,2,…,n-1.

გარდა ამისა,

$$\int_0^1 f(x) \varphi_i^h(x) dx = f_i,$$

სადაც

$$f_i = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i^h \ \ (x) dx$$

i,j=1,2,…,n-1.

ამ ფორმულებისა და (25) იგივეობის გათვალისწინებით ვღებულობთ სასრულელემენტებიანი სისტემის საბოლოო სახეს

$$\frac{3}{2}\left(cd - a + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i - a_{i-1}}{h} \right)^2 \right) \frac{a_{i-1} - 2a_i + a_{i+1}}{h^2} + (cd)^2 \, \frac{a_{i-1} - 4a_i + a_{i+1}}{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} s_{ij} \ \alpha_j \ = \ f_i \quad i = 1,2, \dots, n-1 \ (\alpha_0 = \alpha_n = 0$$

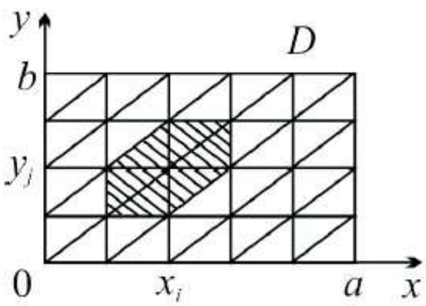
მიღებული არაწრფივი სისტემის ამოსახსნელად შეიძლება გამოყენებული ქნას იტერაციული მეთოდები.

თავი II .   1. ბაზისური ფუნქციები ორგანზომილებიანი ამოცანებისათვის

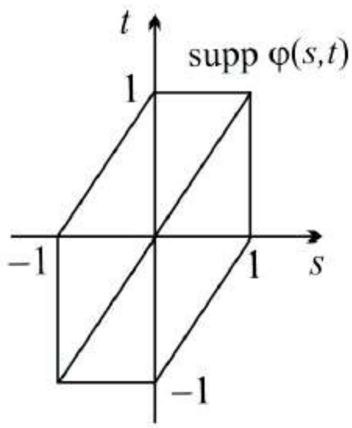
აქ განვიხილავთ ბაზისის აგების ამოცანას ორგანნზომილებიან შემთხვევაში. ვინაიდან შესაბამისი უბან-უბან მუდმივი ბაზისური ფუნქციების სახე აშკარაა და რადგან ეს შემთხვევა ერთგანზომილებიანი შემთხვევის ანალოგიურია, ამიტომ გადავიდეთ უშუალოდ უბან-უბან წრფივი ფინიტური ფუნქციების შესწავლაზე.

1.1 უბან-უბან წრფივი ფუნქციები მართკუთხედზე

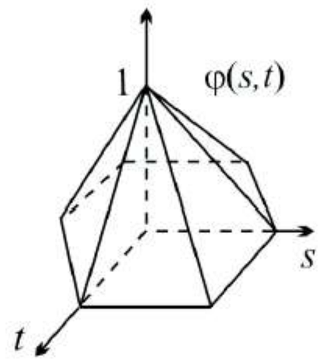
განვიხილოთ $D = \{0 < x < a,\ \ 0 < y < b\}$მარკუთხედზე განსაზღვრული $u(x,y) \in \dot{W}_2^2(D)$ფუნქციის უბან-უბან წრფივი ფუნქციებით აპროქსიმირების საკითხი.



ნახ. 1



ნახ. 2



ნახ. 3

$x_i = ih_x,\ \ y_i = jh_y, h_x = a/N_x\ ,\ \ h_y = b/N_y,$ სადაც N_x და N_yდადებითი მტელი რიცხვებია, წრფეების საშუალებით დავყოთ D მართკუთხედი D_{ij}ქვეარეებად. ამის შემდეგ დიაგონალის გამოყენებით თითოეული D_{ij} მართკუთხედი დავყოთ ორ სამკუთხედად (ნახ.1).

თითოეულ (x_i, y_j)კვანძს $i = 0, 1, 2, \dots, N_x$, $j = 0, 1, 2, \dots, N_y$შევუსაბამოთ $\varphi_{ij}^h(x,y)$ფუნქცია, რომელიც მოცემულ კვანძში უდრის ერთს, ნულია ყველა დანარჩენ კვანძში და წრფივია თითოეულ სამკუთხედზე. $\varphi_{ij}^h(x,y)$ ფუნქციის ანალიზური სახის მისაღებად შემოვიღოთ დამხმარე $\varphi(s,t)$ფუნქცია

$$\varphi(s,t) = \begin{cases} 1-s, & 0 \le s \le 1, \quad 0 \le t \le s, \\ 1-t, & 0 \le s \le 1, \quad s \le t \le 1, \\ 1+s-t, & -1 \le s \le 0, \quad 0 \le t \le s+1, \\ 1+s, & -1 \le s \le 0, \quad s \le t \le 0, \\ 1+t, & -1 \le s \le 0, \quad -1 \le t \le s, \\ 1-s+t, & 0 \le s \le 1, \quad s-1 \le t \le 0. \end{cases}$$

$\varphi(s,t)$ფუნქციის მატარებელი და გრაფიკი მოყვანილია ნახ.2 და ნახ.3- ზე.

ახლა $\varphi_{ij}^{h}(x,y)$ ფუნქციები შეიძლება წარმოვადგინოთ

$$\varphi_{ij}^{h}(x,y)=\varphi\left(\frac{x}{h_x}-i,\ \ \frac{y}{h_y}-j\right)$$

სახით. ამ ფუნქციებს ეწოდებათ კურანტის ფუნქციები.

განვიხილოთ, φ_{ij}^{h} ფუნქციების მააპროქსიმირებელი თვისებები. ვთქვათ, მოცემულია $u(x,y)\in W_2^2(D)\subset C(D)$ფუნქცია. $u_{ij}=u(x_i,y_j),\ i=0,1,\dots,N_x, j=0,1,2,\dots,\ N_y$, რიცხვების გამოყენებით ავაგოთ წრფივი კომბინაცია

$$u_I(x,y)=\sum_{i=0}^{N_x}\sum_{j=0}^{N_y}u_{ij}\varphi_{ij}(x,y),$$

რომელსაც ვუწოდოთ $u(x,y)$ფუნქციის უბან-უბან წრფივი შევსება. ცხადია, რომ

$u_I\in C(\bar{D})\cap W_2^1(D)$.თუ $u\in \dot{W}_2^1(D)\cap W_2^2(D)$, მაშინ

$$u_I(x,y)=\sum_{i=1}^{N_x-1}\sum_{j=1}^{N_y-1}u_{ij}\varphi_{ij}(x,y)$$

(აჯამვა ხდება D არის შიდა კვანძების მიმართ), ე,ი. $u_I\in \dot{W}_2^1(D)$.თუ $u(x,y)\in W_2^2(D)$, მაშინ

$$\|u-u_{\mathrm{I}}(x,y)\|_{L_2(D)}\le ch^2\|u\|_{W_2^2(D)},$$

$$\|u-u_{\mathrm{I}}(x,y)\|_{W_2^1(D)}\le \mathrm{ch}\|u\|_{W_2^2(D)},$$

2. სასრულელემენტებიანი სქემა ორგანზომილებიანი ამოცანისთვის

2.1 ამოცანის დასმა

განვიხილოთ ორგანზომილებიანი ელიფსური ამოცანა

$$-\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{x_j}\right)=f,\qquad x=(x_1\,,x_2)^{\mathrm{T}}\in D,\qquad (36)$$

$$u|_{\partial D}=0,\qquad (37)$$

სადაც $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$შემოსაზღვრული ფუნქციებია, ამასთან ყოველი$\xi=(\xi_1,\xi_2)^{\mathrm{T}}$ ვექტორისათვის სრულდება

$$\mu_0\sum_{i=1}^{2}\xi_1^2\le\inf_{x\in D}\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(x)\xi_1\xi_2\le\sup_{x\in D}\sum_{i,j=1}^{2}a_{ij}(x)\xi_1\xi_2\le\mu_1\sum_{i=1}^{2}\xi_1^2\,,$$

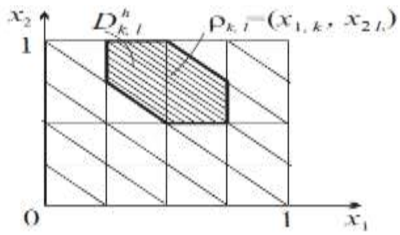
სადაც μ_0, μ_1დადებითი მუდმივებია, ამასთან $\mu_0\le\mu_1$, ხოლო ∂D, რომელიც წარმოადგენს D არის საზღვარს, უბან-უბან წრფივია.

2.2. სასრულ ელემენტთა მეთოდის გამოყენება

ისევე, როგორც ერთგანზომილებიანი ამოცანის შემთხვევაში, შეგვიძლია გაჩვენოთ, რომ (36), (37) ამოცანის ოპერატორი სიმეტრიეულია და დადებითად განსაზღვრულია. ამიტომ ეს ამოცანა $W_2^1(D)$სივრცეში.

$$\mathcal{I}(u)\int_D \left(\sum_{i,j=1}^{2} \alpha_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\delta \partial}\right)dx - 2\int_D fudx$$

ფუნქციონალის მინიმუმის მოძებნის ამოცანის ეკვივალენტურია.
სიმარტივისთვის დავუშვათ,რომ D არე წარმოადგენს კვადრატს D = {(x_1, x_2) : $0 < x_1, x_2 < 1$}.



ნახ.1

გამოვიყენოთ სასრულ ელემენტთა მეთოდი. დავფაროთ D არე თანაბარი ბადით ბიჯით $h = \frac{1}{N+1}$,სადაც N მთელი დადებითი რიცხვია, და მოვახდინოთ D -ს სამკუთხედებად დაყოფა (triangulation ინგლ.), როგორც ეს ნაჩვენებია ნახ.4–ზე. ყოველი p$_k$შიგა კვანძს შევუსაბამოთ $D_{k,l}^h$ ექვსკუთხედი (ნახ.1) და უბან-უბან წრფივი ბაზისური ფუნქცია $\varphi_{k,l}(x)$. ასეთი ფუნქციების სიმრავლე აღვნიშნოთ $\{\varphi_{k,l}(x)\}_{k,l=1}^N$.
(21), (22) ამოცანის მიახლოებითი ამონახსნი ვეძებოთ შემდეგი სახით

$$u^h(x)\sum_{k,j=1}^{N} b_{k,l}\,\varphi_{k,l}(x) \qquad (38)$$

(23) გაშლის $b_{k,l}$უცნობი კოეფიციენტების მიმართ მივიღებთ წრფივ ალგებრულ განტოლებათა სისტემას

$$\hat{A}b = f \qquad (39)$$

სადაც $b=(b_1,b_2,\ldots\ b_{N^2})^T$ვექტორი შედგება (38) გაშლის $b_{N(k-1)+l}=b_{k,l}$კოეფიციენტებისაგან, $\hat{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_{N^2})^T$ვექტორის კომპონენტები გამოითვლება ფორმულით

$$f_{N(k-1)+l} = f_{k,l} = \int_{D_{k,l}} f\varphi_{k,l}(x)dx, \quad k,l = 1,2,\ldots.N.$$

ხოლო $\hat{A} = (a_{pq})_{p,q=1}^{N^2}$მატრიცის ელემენტების გამოსათვლელად ვიყენებთ ფორმულას

$$\alpha_{N(k-1)+l,N(i-1)+j} = \alpha_{k,l}^{i,j} = \int_D \sum_{s,t=1}^{2} \alpha_{st}(x)\frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial x_s}\frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial x_t}\,dx. \qquad (40)$$

k,l = 1,2,…,N,   i,j = 1,2,…,N.

შემოვიღოთ N რიგის $A_{k,i}=(a_{k,l}^{i,j})_{l,j}^{N}$მატრიცი, ვთქვათ$a_{k,l}^{i,j}$=0

როცა შემდეგი ორი უტოლობიდან

$$|i - k| > 1 \quad |i - l| > 1$$
$$k,l = 1, 2,\dots,N \quad i,j = 1,2, \dots, N$$

ერთერთი მაინც სრულდება. შედეგად მივალთ დასკვნამდე, რომ Â არის ბლოკური სამდიაგონალური მატრიცი

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{N-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{N,N-1} & A_{NN} \end{pmatrix},$$

სადაც A_{kk} N-ური რიგის სამდიაგონალური თვითშეუღლებული მატრიცა, k = 1,2, …, N

$$A_{kk} = \begin{pmatrix} a_{k,1}^{k,1} & a_{k,2}^{k,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{k,1}^{k,2} & a_{k,2}^{k,2} & a_{k,3}^{k,2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & a_{k,N}^{k,N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{k,N-1}^{k,N} & a_{k,N}^{k,N} \end{pmatrix}, \tag{41}$$

$A_{k,k+1} = A_{k+1,k}^{*}$ და ყოველი $A_{k,k-1}$, k= 2,3,…, N, წარმოადგენს N-ური რიგის ორდიაგონალურ მატრიცს,

$$A_{k,k-1} = \begin{pmatrix} a_{k,1}^{k-1,1} & a_{k,1}^{k-1,2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{k,2}^{k-1,2} & a_{k,2}^{k-1,3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{k,N-1}^{k-1,N-1} & a_{k,N-1}^{k-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k,N}^{k-1,N} \end{pmatrix}. \tag{42}$$

განვიხილოთ (36), (37) ამოცანის კერძო შემთხვევა

$$-\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\mathrm{p}(\mathrm{x},\mathrm{y})\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}\right)-\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\mathrm{q}(\mathrm{x},\mathrm{y})\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}\right)=\mathrm{f} \qquad \mathrm{D}-\text{ზე},$$

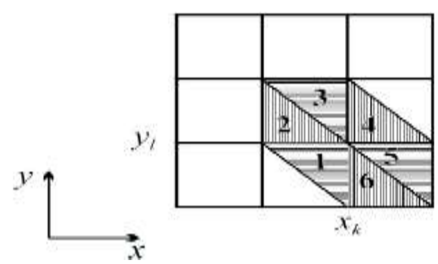
$$\mathrm{u}=0 \qquad\qquad \delta\mathrm{D}\text{ -ზე}.$$

$D_{k,l}^{h}$არე წარმოვადგინოთ ექვსი სამკუთხედის $\{D_{k,l}^{h}\}_{m=1}^{6}$გაერთიანების სახით, რომელშიც დანომვრის წესი ნაჩვენებია ნახ. 2-ზე.

დავწეროთ ანალიზური გამოსახულება ბაზისური ფუნქციისათვის, რომელიც შეესაბამება(x_k, y_l)კვანძს. გამოთვლების შედეგად ვღებულობთ

$$\varphi_{k,j}(x,y)=\begin{cases} 1-\frac{1}{h}(x_k-x)-\frac{1}{h}(y_l-y), & (x,y)\in D_{r,l,1}^{k} \\ 1-\frac{1}{h}(x_k-x) & (x,y)\in D_{r,l,2}^{k} \\ 1+\frac{1}{h}(x_k-y)(x,y)\in D_{r,l,3}^{k} & \\ 1+\frac{1}{h}(x_k-x)+\frac{1}{h}(y_l-y) & (x,y)\in D_{r,l,4}^{k} \\ 1+\frac{1}{h}(x_k-x), & (x,y)\in D_{r,l,5}^{k} \\ 1-\frac{1}{h}(x_k-y), & (x,y)\in D_{r,l,6}^{k} \end{cases} \qquad (43)$$

გამოვიყენოთ (40) და (43) ფორმულები. სიმარტივისათვის აღვნიშნოთ $D_i = D_{k,l,i}^{h}$.



ნახ.2

(41) მატრიცის დიაგონალური ელემენტებისათვის გვექნება

$$\alpha_{k,l}^{k,l}=\int_{D_{k,l}^{h}}\left[p(x,y)\left(\frac{\partial_{k,l}}{\partial x}\right)^{2}+q(x,y)\ \left(\frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial x}\right)^{2}\right]dxdy=$$

$$=\frac{1}{h^2}\left[\int_{D_1\cup D_2}p(x,y)dxdy+\int_{D_4\cup D_5}p(x,y)dxdy+\int_{D_3\cup D_4}q(x,y)dxdy+\int_{D_6\cup D_1}q(x,y)dxdy\right]=$$

$$= \frac{1}{h^2}\left[\int\limits_{D_1\cup D_2\cup D_4\cup D_5} p(x,y)dxdy + \int\limits_{D_1\cup D_3 D_4\cup D_6} q(x,y)dxdy\right]$$

ამავე მატრიცის არადიაგონალური ელემენტებისათვის მართებულია

$$\alpha_{k,l}^{k,l-1} = \int\limits_{D_{k,l}^h\cup D_{k,l-1}^h}\left[p(x,y)\frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{k,l-1}}{\partial x} + q(x,y)\ \frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{k,l-1}}{\partial y}\right]dxdy =$$

$$= \int\limits_{D_{k,l}^h\cup D_{k,l-1}^h}\left[p(x,y)\frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{k,l-1}}{\partial x} + q(x,y)\ \frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{k,l-1}}{\partial y}\right]dxdy = -\frac{1}{h^2}\int\limits_{D_1\cup D_6} q(x,y)dxdy.$$

აქ ჩვენ გავითვალისწინეთ ის, რომ D_1-ზე $\frac{\partial\varphi_{k,l-1}}{\partial x} = 0$, ხოლო D_6-ზე $\frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial x} = 0$, სადაც პირველი ტოლობა იმის შედეგია, რომ $\varphi_{k,l}$ფუნქციისათვის D_1სამკუთხედი $\varphi_{k,l-1}$ - სათვის წარმოადგენს D_3-ს.

ანალოგიურ მსჯელობებზე დაყრდნობით მივიღებთ (42) მატრიცის ელემენტებს დიაგონალური ელემენტებისათვის გვექნება

$$\alpha_{k,l}^{k-1,l} = \int\limits_{D_{k,l}^h\cup D_{k-1,l}^h}\left[p(x,y)\frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{k-1,}}{\partial x} + q(x,y)\ \frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{k-1,l}}{\partial y}\right]dxdy =$$

$$= \int\limits_{D_{k,l}^h\cup D_{k-1,l}^h}\left[p(x,y)\frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{k-1,l}}{\partial x} + q(x,y)\ \frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{k-1,l}}{\partial y}\right]dxdy = -\frac{1}{h^2}\int\limits_{D_1\cup D_2} p(x,y)dxdy.$$

ვინაიდან D_2-ზე $\frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial y}$=0, ხოლო D_1-ზე, რომელიც $\varphi_{k-1,l}$-სათვის D_5-ია, გვექნება $\frac{\partial\varphi_{k-1,l}}{\partial y}$=0.

და ბოლოს, იმის გამო, რომ $D_{k,l}^h\ \cap\ D_{k-1,l+1}^h = \varnothing$, ვღებულობთ

$$\alpha_{k,l}^{k-1,l} = \int\limits_{D_{k,l}^h\cup D_{k-1,l}^h}\left[p(x,y)\frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{k-1,l+1}}{\partial x} + q(x,y)\ \frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{k-1,l+1}}{\partial y}\right]dxdy =$$

$$= \int\limits_{D_{k,l}^h\cup D_{k,l-1}^h}\left[p(x,y)\frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial x}\frac{\partial\varphi_{k-1,l+1}}{\partial x} + q(x,y)\ \frac{\partial\varphi_{k,l}}{\partial y}\frac{\partial\varphi_{k-1,l+1}}{\partial y}\right]dxdy = 0$$

აქედან ვაკეთებთ დასკვნას $A_{k,k-1}$მატრიცების დიაგონალურობის შესახებ. სასრულსხვაიბიანი (39) სისტემის ამოსახსნელად შეიძლება გამოყენებულ იქნას იტერაციული პროცესი, მატრიცული ფაქტორიზაციის მეთოდი და ა.შ.

ლიტერატურა

1. P.G. Ciarlet, The finite element method for elliptic problems, North-Holland, Amsterdam, 1978.
2. Г.И Марчук,Методы вычислительной математики, М.: Наука, 1989,608 СТР
3. J. N. Reddy, An introduction to the finite method McGraw-Hill, 1993, 684 pp.
4. Timoshenko Sp, Young DH, Weaver W. Vibrations problems in engineering. JoHn Wiley and Sons, Inc: New York, 1974.
5. Tucsnak M, On an initial and boundary value problem for the nonlinear beam. Anais da Academia Brasileira de Ciencias 1991.