ვინერის ფუნქციონალის კონსტრუქციული სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენის შესახებ

ო. ფურთუხია, ვ. ჯაოშვილი
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი, ა. რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტი;
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი, მათემატიკის დეპარტამენტი,

როგორც ცნობილია, სტოქასტური ინტეგრალის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი თვისებაა, რომ ის ქმნის მარტინგალს. კერძოდ, თუ H არის კლასი ყველა ისეთი $f(t,\omega):[0,\infty)\times\Omega\to R$ ფუნქციების, რომ: (*i*) ასახვა $(t,\omega)\mapsto f(t,\omega)$ პროგრესულად ზომადია; (*ii*) შემთხვევითი სიდიდე $f(t,\cdot)$ არის $\Im_t^w$-ზომადი (სადაც $\{w_t, t\ge 0\}$ არის სტანდარტული ვინერის პროცესი და $\Im_t^w$ კი მის მიერ წარმოქმნილი გასრულებული ბუნებრივი ფილტრაცია, $\Im_t^w=\overline{\sigma}\{w_s, s\in[0,t]\}$); (*iii*) ასახვა f კვადრატით ინტრეგრებადია $P\otimes\lambda$ ზომის მიმართ (ანუ $E[\int_0^T f^2(t,\omega)\lambda(dt)]<\infty$), მაშინ სტოქასტური პროცესი $\int_0^t f(s,\omega)dw_s(\omega)$, $t\ge 0$ არის $\Im_t^w$-მარტინგალი. მეორეს მხრივ, კლარკის (1971) ფორმულის თანახმად, აგრეთვე სამართლიანია შებრუნებული მტკიცებულება (ე.წ. მარტინგალური წარმოდგენის თეორემა). მართლაც, თუ F არის კვადრატით ინტეგრებადი $\Im_T^w$-ზომადი შემთხვევითი სიდიდე, მაშინ (კლარკის ფორმულის საფუძველზე) მოიძებნება ისეთი კვადრატით ინტეგრებადი $\Im_t^w$-შეთანხმებული შემთხვევითი პროცესი $\varphi(t,\omega)$, რომ ადგილი აქვს წარმოდგენას $F=EF+\int_0^T\varphi(s,\omega)dw_s$. თუ ახლა ავიღებთ პირობით მათემატიკურ ლოდინს უკანასკნელი თანაფარდობის ორივე მხარიდან, მაშინ F შემთხვევით სიდიდესთან დაკავშირებული $M_t=E(F\,|\,\Im_t^w)$ ლევის მარტინგალისთვის დავინახავთ რომ სამართლიანია შემდეგი სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენა $M_t=M_0+\int_0^t\varphi(s,\omega)dw_s$.

კლარკის ფორმულა (ისევე როგორც მარტინგალური წარმოდგენის თეორემა) იძლევა საკმაოდ აბსტრაქტულ რეზულტატს. რაც შეეხება ინტეგრანდის დასრულებული სახის გამოსახულებას, ის შესაძლებელია მიღებულ იქნას მხოლოდ სპეციალურ შემთხვევებში. კონსტრუქციული მარტინგალური წარმოდგენის ყველაზე უფრო ზოგადი გამოკვლევები ჩატარებულია მალივენის აღრიცხვაში. აქ კონსტრუქციული მარტინგალური წარმოდგენა დაფუძნებულია მალივენის წარმოებულზე და ის ცნობილია როგორც კლარკ-ჰაუსმან-ოკონეს ფორმულა (იხ. ოკონე, 1984, ვინერის ფუნქციონალების შემთხვევაში და მა, პროტერი და მარტინი, 1998, $D_{2,1}^M$ კლასის ფუნქციონალებისთვის ნორმალური მარტინგალების შემთხვევაში). ჩვენ (ფურთუხია, 2003) შემოვიღეთ $D_{p,1}^M$, $1<p<2$, სივრცე და განვაზოგადეთ კლარკ-ჰაუსმან-ოკონეს ფორმულა ფუნქციონალებისთვის აღნიშნული კლასიდან. $\varphi(t,\omega)$ ინტეგრანდის მოძებნის აბსოლუტურად განსხვავებული მეთოდი შემოთავაზებული იყო შირიაევის, იორისა და გრავერსენის (2003, 2006) მიერ, რომელიც დაფუძნებული იყო იტოს (განზოგადებული) ფორმულისა და ლევის თეორემის გამოყენებაზე F-თან დაკავშირებული ლევის მარტინგალისათვის. ჩვენ (ფურთუხია, ჯაოშვილი, 2009) შემოვიღეთ სტოქასტური წარმოებულის ახალი კონსტრუქცია პუასონის ფუნქციონალებისთვის და დავადგინეთ ცხადი გამოსახულება კლარკის წარმოდგენის ინტეგრანდისთვის.

მარტინგალების კლასი, რომელთა მიმართაც შესაძლებელია გამოყენებულ იქნას კლარკ-ჰაუსმან-ოკონეს ფორმულა, შეზღუდულია პირობით, რომ მარტინგალის ტერმინალური მნიშვნელობა უნდა იყოს მალივენის აზრით დიფერენცირებადი. ჩვენ (ღლონტი, ფურთუხია, 2016) განვიხილეთ შემთხვევა, როცა ტერმინალური M_T მნიშვნელობა არ არის დიფერენცირებადი, მაგრამ პირობითი მათემატიკური ლოდინი $E(M_T\,|\,\Im_t^w)$ (როცა $t\in[0,T)$) დიფერენცირებადია და განვაზოგადეთ კლარკ-ჰაუსმან-ოკონეს ფორმულა. აქ ჩვენ ვიხილავთ ტრაექტორიაზე დამოკიდებულ ვინერის ფუნქციონალს $F=(w_T-C_1)^-\cdot I_{\{\inf_{0\le t\le T} w_t\le C_2\}}$, რომელიც არადიფერენცირებადია და გამოგვყავს მისთვის სტოქასტური ინტეგრალური წარმოდგენის ფორმულა ცხადი სახის ინტეგრანდით. ამ მიზნის მისაღწევად, ვითვლით ფუნქციონალის პირობით მათემატიკურ ლოდინს და ვიყენებთ კლარკ-ჰაუსმან-ოკონეს ფორმულის ზემოთ ხსენებულ ჩვენს განზოგადოებას.